Über höchst irrationale von Winkeln abhängige Differentialformeln, welche sich dennoch mit Logarithmen und Kreisbogen integrieren lassen*

Leonhard Euler

Lemma

§1 Was ich schon des Öfteren über irrationale Differentialformeln mitgeteilt habe, welche mit keiner Substitution rational gemacht werden können, aber nichtsdestoweniger eine Integration mit Logarithmen und Kreisbogen zulassen, kann auch auf Formeln mit Winkeln von solcher Art übertragen werden, welche Sinus und Kosinus eines bestimmten Winkels beinhalten. Aber die allgemeine Form von Differentialen von dieser Art, welche auf diese Weise behandelt werden können, kann auf die folgende Weise dargestellt werden: Während der Winkel φ irgendeinen Winkel bedeutet, bezeichne Φ irgendeine rationale Funktion von $\tan n\varphi$ und ich habe entdeckt, dass diese Formel

$$\frac{\Phi\partial\varphi(f\sin\lambda\varphi+g\cos\lambda\varphi)}{\sqrt[n]{(a\sin n\varphi+b\cos n\varphi)^{\lambda}}}$$

*Originaltitel: "De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet", zuerst publiziert in: *Institutionum calculi integralis, Band 4* (1794, verfasst 1777): pp. 183–194, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Volume 19, pp. 129 – 140, Eneström-Nummer E671, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

immer mit Logarithmen und Kreisbogen integriert werden kann, was ich, mit den einfachen Fällen beginnend, in den folgenden Problem zu zeigen beschlossen habe.

PROBLEM 1

§2 *Nachdem die Differentialformel*

$$\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}}$$

vorgelegt worden ist, ihr Integral mit Logarithmen und Kreisbogen ausfindig zu machen.

LÖSUNG

Weil mir ja freilich noch kein anderer Weg offensteht dies zu leisten als über imaginäre Größen vorzugehen, werden ich die Formel $\sqrt{-1}$ im Folgenden mit dem Buchstaben i bezeichnen, so dass $ii=-1$ und daher $\frac{1}{i}=-i$ ist. Nun wollen wir vor allem im Zähler unserer Formel anstelle von $\cos\varphi$ diese zwei Teile einsetzen

$$\frac{1}{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)+\frac{1}{2}(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$

und wollen diese vorgelegte Formel in zwei Teilen von dieser Art darstellen, welche

$$\partial p=\frac{\partial\varphi(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}}\quad\text{und}\quad\partial q=\frac{\partial\varphi(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}}$$

seien, sodass unsere vorgelegte Formel $\frac{1}{2}\partial p+\frac{1}{2}\partial q$ und ihr Integral $\frac{p+q}{2}$ ist.

§3 Nun wollen wir die beiden Teile getrennt auf die folgende Weise behandeln. Für die erste Formel

$$\partial p=\frac{\partial\varphi(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}}$$

wollen wir natürlich

$$\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}} = x$$

setzen, dass

$$\partial p = x\partial\varphi$$

ist, und nach Potenzieren mit n werden wir

$$x^n = \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n}{\cos n\varphi}$$

haben. Es ist aber bekannt, dass

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

ist, und so wird

$$x^n = 1 + i\tan n\varphi$$

sein, woher man

$$\tan n\varphi = \frac{x^n - 1}{i} = i(1 - x^n)$$

berechnet; weil daher, nachdem im Allgemeinen $\tan\omega = Z$ gesetzt worden ist, $\partial\omega = \frac{\partial Z}{1+ZZ}$ ist, wird für unseren Fall

$$n\partial\varphi = \frac{-nix^{n-1}\partial x}{1 + ii - 2iix^n + iix^{2n}}$$

sein, welche Formel wegen $ii = -1$ in diese überführt wird

$$\partial\varphi = \frac{-ix^{n-1}\partial x}{2x^n - x^{2n}},$$

und daher haben wir die Formel

$$\partial p = x\partial\varphi = \frac{-i\partial x}{2 - x^n};$$

Weil sie rational ist, unterliegt ihre Integration keiner Schwierigkeit.

§4 Wenn also nun in gleicher Weise für die andere Formel

$$\partial q = \frac{\partial \varphi (\cos \varphi - i \sin \varphi)}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}}$$

entsprechend

$$\frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}} = y$$

gesetzt wird, dass

$$\partial q = y \partial \varphi$$

ist, wird mit ähnlichen Operationen, welche von den vorhergehenden allein darin abweichen, dass der Buchstabe i negativ anzunehmen ist, diese Transformation

$$\partial q = \frac{i \partial y}{2 - y^n}$$

resultieren; weil diese der ersten vollkommen gleich ist, wird mit derselben Integration die ganze Aufgabe erledigt werden und wir werden für das gesuchte Integral

$$p + q = -i \int \frac{\partial x}{2 - x^n} + i \int \frac{dy}{2 - y^n}$$

haben.

§5 Es ist aber bekannt, dass die Integrale solcher Formeln aus Teilen von zwei Arten bestehen, natürlich aus Logarithmen und Kreisbogen, sodass die allgemeine Form jener $f \log(\alpha + \beta y + \gamma xx)$, von diesen aber $g \arctan(\delta + \varepsilon x)$ ist. Weil also hier die Differenz zwischen zwei ähnlichen Integralformeln auftritt, wird aus den einzelnen logarithmischen Anteilen eine solche Form

$$-if \log \frac{\alpha + \beta x + \gamma xx}{\alpha + \beta y + \gamma yy}$$

entspringen, wo so x wie y imaginäre Größen beinhaltet; deswegen wollen wir der Kürze wegen

$$x = r + is \quad \text{und} \quad y = r - is$$

setzen, wo

$$r = \frac{\cos\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}} \quad \text{und} \quad s = \frac{\sin\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}}$$

sein wird; nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, wird ein beliebiger logarithmischer Anteil

$$-if \log \frac{\alpha + \beta r + \gamma rr - \gamma ss + i(\beta s + 2\gamma rs)}{\alpha + \beta r + \gamma rr - \gamma ss - i(\beta s + 2\gamma rs)}$$

sein.

§6 Anstelle diese längeren Ausdrucks wollen wir der Kürze wegen

$$-if \log \frac{t + iu}{t - iu}$$

schreiben, sodass

$$t = \alpha + \beta r + \gamma rr - \gamma ss \quad \text{und} \quad u = \beta s + 2\gamma rs$$

ist, und so werden auch diese Werte über den Winkel φ bekannt. Weil ja schon öfter bewiesen worden ist, dass

$$\log \frac{t + u\sqrt{-1}}{t - u\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1} \cdot \arctan \frac{u}{t}$$

ist, wird dieser Anteil des Integrals $= +2f \arctan \frac{u}{t}$ sein, welcher also vollkommen reell ist, während die imaginären Größen sich gegenseitig aufheben, sodass jeder imaginäre logarithmische Anteil einen reellen Kreisbogen hervorbringt.

§7 In gleicher Weise wollen wir in Allgemeiner Weise die zwei durch Integration hervorzugehenden Kreisbogen verbinden, welche aus der angenommenen Form

$$-ig \arctan(\delta + \varepsilon x) + ig \arctan(\delta + \varepsilon y)$$

sein werden, welche Form so zu einem einzigen Bogen zusammengezogen wird, welcher

$$-ig \arctan \frac{\varepsilon(x-y)}{1+(\delta+\varepsilon x)(\delta+\varepsilon y)}$$

sein wird, welcher nach Einführen der angenommenen Werte $x = r + is$ und $y = r - is$ diese Form annehmen wird

$$-ig \arctan \frac{2i\varepsilon s}{1+\delta\delta+2\varepsilon\delta r+\varepsilon\varepsilon(rr+ss)}.$$

Weil also im Allgemeinen

$$\arctan v\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log \frac{1+v}{1-v}$$

ist, wird dieser Kreisteil in den folgenden reellen Logarithmus transformiert werden

$$\frac{g}{2} \log \frac{1+\delta\delta+2\delta\varepsilon r+\varepsilon\varepsilon(rr+ss)+2\varepsilon s}{1+\delta\delta+2\delta\varepsilon r+\varepsilon\varepsilon(rr+ss)-2\varepsilon s};$$

auf diese Weise wird also durch Nehmen der Teile aller Integrale schließlich das gesuchte Integral mit lediglich Logarithmen und Kreisbogen reell ausgedrückt erhalten werden.

PROBLEM 2

§8 *Nach Vorlage der Integralformel*

$$\frac{\partial\varphi \sin\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}}$$

ihr Integral mit Logarithmen und Kreisbogen ausfindig zu machen.

LÖSUNG

Hier schreibe man anstelle von $\sin\varphi$ diese aus zwei Teilen bestehende Form

$$\frac{1}{2i}(\cos\varphi + i\sin\varphi) - \frac{1}{2i}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

und löse die vorgelegte Formel in diese Teil auf

$$\partial p = \frac{\partial\varphi(\cos + i\sin\varphi)}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}} \quad \text{und} \quad \partial q = \frac{\partial\varphi(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}},$$

so dass die vorgelegte Formel nun $\frac{\partial p - \partial q}{2i}$ und daher das gesuchte Integrale $\frac{p-q}{2i}$ wird.

§9 Wenn wir nun umgekehrt wie zuvor

$$\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}} = x \quad \text{und} \quad \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}} = y$$

setzen, wird man wie oben

$$\partial p = -\frac{i\partial x}{2 - x^n} \quad \text{und} \quad \partial q = \frac{i\partial y}{2 - y^n}$$

finden; daher wird also das gesuchte Integral selbst

$$\frac{p-q}{2i} = -\frac{1}{2}\int\frac{\partial x}{2 - x^n} - \frac{1}{2}\int\frac{\partial y}{2 - y^n}$$

werden, wo die Koeffizienten reell sein werden.

§10 Wir wollen nun aus der Integralform einen logarithmischen Anteil jeder der beiden Teilintegrale betrachten, welcher $f\log(\alpha + \beta x + \gamma xx)$ sei, und daraus wird für das gesuchte Integral aus jedem der beiden Teile

$$-\frac{1}{2}f\log(\alpha + \beta x + \gamma xx) - \frac{1}{2}f\log(\alpha + \beta y + \gamma yy)$$

entspringen. Wenn wir daher wie oben der Kürze wegen $x = r + is$ und $y = r - is$ setzen, dann aber

$$t = \alpha + \beta r + \gamma rr - \gamma ss \quad \text{und} \quad u = \beta s + 2\gamma rs,$$

werden die beiden Logarithmen

$$= -\frac{1}{2}f\log(t + iu) - \frac{1}{2}f\log(t - iu)$$

werden, welche zu

$$-\frac{1}{2}f\log(tt + uu)$$

zusammengezogen werden, welcher Ausdruck nun reell ist und keiner weiteren Reduktion bedarf.

§11 In gleicher Weise werden die beiden aus der Integration zu entspringenden Kreisanteile

$$-\frac{1}{2}g\arctan(\delta+\varepsilon x)-\frac{1}{2}g\arctan(\delta+\varepsilon y)$$

sein, welche über r und s so dargestellt werden

$$-\frac{1}{2}f\left(\arctan(\delta+\varepsilon r+i\varepsilon s)+\arctan(\delta+\varepsilon r-i\varepsilon s)\right),$$

welche zwei Bogen so zu einem zusammengezogen werden

$$-\frac{1}{2}g\arctan\frac{2\delta+2\varepsilon r}{1-(\delta+\varepsilon r)^2-\varepsilon\varepsilon ss},$$

welcher Ausdruck nun überdies als reell hervorgeht.

PROBLEM 3

§12 *Nach Vorlage der Differentialformel*

$$\frac{\partial\varphi\cos\lambda\varphi}{\sqrt[n]{\cos^\lambda n\varphi}}$$

ihr Differential über Logarithmen und Kreisbogen ausfindig zu machen.

LÖSUNG

Weil

$$\cos\lambda\varphi=\frac{1}{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^\lambda+\frac{1}{2}(\cos\varphi-i\sin\varphi)^\lambda$$

ist, teile man die vorgelegte Formel in diese zwei Teile

$$\partial p=\frac{\partial\varphi(\cos\varphi+i\sin\varphi)^\lambda}{\sqrt[n]{\cos^\lambda n\varphi}}\quad\text{und}\quad\partial q=\frac{\partial\varphi(\cos\varphi-i\sin\varphi)^\lambda}{\sqrt[n]{\cos^\lambda n\varphi}},$$

sodass das gesuchte Integral $\frac{p+q}{2}$ wird.

§13 Nun wollen wir, wie wir es zuvor gemacht haben,

$$\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}} = x \quad \text{und} \quad \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}} = y$$

setzen, wonach

$$\partial p = x^{\lambda}\partial\varphi \quad \text{und} \quad \partial q = y^{\lambda}\partial\varphi$$

werden wird. Nachdem aber die Rechnung wie oben durchgeführt worden ist, werden wir

$$\partial\varphi = -\frac{ix^{n-1}\partial x}{2x^n - x^{2n}}$$

und daher

$$\partial p = -\frac{ix^{\lambda-1}\partial x}{2 - x^n}$$

erhalten; und in gleicher Weise wird

$$\partial q = \frac{iy^{\lambda-1}\partial y}{2 - y^n}$$

sein; und so wird das ganze gesuchte Integral

$$= -\frac{i}{2}\int\frac{x^{\lambda-1}\partial x}{2 - x^n} + \frac{i}{2}\int\frac{y^{\lambda-1}\partial y}{2 - y^n}$$

sein.

§14 Weil diese zwei Integrale ja einander gleich sind und daher die gleichen logarithmischen wie kreisabhängigen Anteile umfassen, berechnet man aus dem logarithmischen, welcher $f\log(\alpha + \beta x + \gamma xx)$ sei, indem man wie zuvor $x = r + is$ und $y = r - is$, dann aber $t = \alpha + \beta r + \gamma rr - \gamma ss$ und $u = \beta s + 2\gamma rs$ setzt, daraus zuerst diesen logarithmischen Teil

$$-if\log\frac{t + iu}{t - iu};$$

weil dieser imaginär ist, wird er auf diesen reellen Kreisbogen

$$= 2f\arctan\frac{u}{t}$$

zurückgeführt. In gleicher Weise, wenn die aus der Integration zu entspringende Form des Kreisbogens

$$-g\arctan(\delta+\varepsilon x)$$

war, entsteht aus den Kreisanteilen der folgenden imaginäre Bogen

$$-ig\arctan\frac{2i\varepsilon s}{1+\delta\delta+2\varepsilon\delta r+\varepsilon\varepsilon(rr+ss)},$$

welcher schließlich auf diesen reellen Logarithmus zurückgeführt wird

$$\frac{g}{2}\log\frac{1+\delta\delta+2\delta\varepsilon r+\varepsilon\varepsilon(rr+ss)+2\varepsilon s}{1+\delta\delta+2\delta\varepsilon r+\varepsilon\varepsilon(rr+ss)-2\varepsilon s}.$$

Problem 4

§15 *Nach Vorlage der Differentialformel*

$$\frac{\partial\varphi\sin\lambda\varphi}{\sqrt[n]{\cos^{\lambda}n\varphi}}$$

ihr Integral über Logarithmen und Kreisbogen ausfindig zu machen.

Lösung

Weil

$$\sin\lambda\varphi=\frac{1}{2i}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\lambda}-\frac{1}{2i}(\cos\varphi-i\sin\varphi)^{\lambda}$$

ist, wollen wir wie bisher diese zwei Teile

$$\partial p=\frac{\partial\varphi(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\lambda}}{\sqrt[n]{\cos^{\lambda}n\varphi}}\quad\text{und}\quad\partial q=\frac{\partial\varphi(\cos\varphi-i\sin\varphi)^{\lambda}}{\sqrt[n]{\cos^{\lambda}n\varphi}}$$

festlegen, so dass das gesuchte Integral $\frac{p-q}{2i}$ ist. Wir wollen nun wiederum

$$\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}}=x\quad\text{und}\quad\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}}=y$$

setzen, dass

$$\partial p=x^{\lambda}\partial\varphi\quad\text{und}\quad\partial q=y^{\lambda}\partial\varphi$$

ist, und daher wird nach derselben Rechnung wie oben

$$\partial p = -\frac{ix^{\lambda-1}\partial x}{2-x^n} \quad \text{und} \quad \partial q = \frac{iy^{\lambda-1}\partial y}{2-y^n}$$

werden, und so wird das gesuchte Integral

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x^{\lambda-1}\partial x}{2-x^n} - \frac{1}{2}\int \frac{y^{\lambda-1}\partial y}{2-y^n}$$

sein.

§16 Wenn wir also, wie es bisher gemacht worden ist, $x = r + is$ und $y = r - is$ setzen und für die logarithmischen Anteile, deren Form $f \log(\alpha + \beta x + \gamma xx)$ sei,

$$t = \alpha + \beta r + \gamma rr - \gamma ss \quad \text{und} \quad u = \beta s + 2\gamma rs$$

setzen, werden die beiden imaginären logarithmischen Anteil wie im zweiten Problem zu einem einzigen reellen Logarithmus zusammengezogen, welcher

$$-\frac{1}{2} f \log(tt + uu)$$

sein wird. Aber wenn für die Kreisanteile, deren Form

$$g \arctan(\delta + \varepsilon x)$$

sei, je zwei solche imaginäre verbunden werden, werden jene zu einem einzigen reellen Bogen

$$-\frac{1}{2} g \arctan \frac{2\delta + 2\varepsilon r}{1 - (\delta + \varepsilon r)^2 - \varepsilon\varepsilon ss}$$

verschmelzen.

ALLGEMEINES PROBLEM

§17 *Wenn Φ irgendeine rationale Funktion von* $\tan n\varphi$ *bezeichnet und diese Differentialformel vorgelegt war*

$$\frac{\Phi\partial\varphi(F \sin\lambda\varphi + G\cos\lambda\varphi)}{\sqrt[n]{(a\cos n\varphi + b\sin n\varphi)^\lambda}},$$

ihre Integration auf Logarithmen und Kreisbogen zurückzuführen.

LÖSUNG

Aus dem Vorhergehenden wird nun leicht eingesehen, dass die Formel des Zählers

$$F \sin \lambda\varphi + G \cos \lambda\varphi$$

immer auch eine solche Form zurückgeführt werden kann

$$F'(\cos\varphi + i\sin\varphi)^\lambda + G'(\cos\varphi - i\sin\varphi)^\lambda$$

und daher die vorgelegte Form selbst in diese zwei Teile aufgeteilt wird

$$\partial p = \frac{\Phi\partial\varphi(\cos\varphi + i\sin\varphi)^\lambda}{\sqrt[n]{(a\cos n\varphi + b\sin n\varphi)^\lambda}}$$

und

$$\partial q = \frac{\Phi\partial\varphi(\cos\varphi - i\sin\varphi)^\lambda}{\sqrt[n]{(a\cos n\varphi + b\sin n\varphi)^\lambda}},$$

sodass das gesuchte Integral nun $F'p + G'q$ sein wird.

§18 Nun setze man für die erste Formel ∂p

$$\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\sqrt[n]{a\cos n\varphi + b\sin n\varphi}} = x$$

und für die zweite

$$\frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\sqrt[n]{a\cos n\varphi + b\sin n\varphi}} = y,$$

sodass daher

$$\partial p = \Phi x^\lambda \partial\varphi \quad \text{und} \quad \partial q = \Phi y^\lambda \partial\varphi$$

ist; daher wird aber

$$x^n = \frac{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}{a\cos n\varphi + b\sin n\varphi}$$

werden, woher man

$$\tan n\varphi = \frac{1 - ax^n}{bx^n - i}$$

berechnet; daher, weil Φ eine rationale Funktion von $\tan n\varphi$ bezeichnet, wird sie auch eine rationale Funktion von x und sogar von x^n werden, welche man mit X bezeichne. Außerdem wird auch das Differential $\partial\varphi$ rational bestimmt werden, weil

$$\partial\varphi = \frac{(ia - b)x^{n-1}\partial x}{(aa + bb)x^{2n} - 2(a + ib)x^n}$$

ist; und auf diese Weise werden wir

$$\partial p = \frac{(ia - b)Xx^{\lambda-1}\partial x}{(aa + bb)x^n - 2(a + ib)}$$

haben; weil diese Form vollkommen rational ist, ist es gewiss, dass ihr Integral, wie viel Mühe auch immer es erfordert, immer mit Logarithmen und Kreisbogen ausgedrückt werden kann.

§19 In gleicher Weise verhält sich die Sache in der anderen Formel ∂q, welche von dieser nur in Bezug auf das Vorzeichen des Buchstabens i abweicht, und weil ja hier alles rational über y ausgedrückt hervorgehen wird, wodurch Φ in Y übergehe, wird man hier

$$\partial q = -\frac{(b + ia)Yy^{\lambda-1}\partial y}{(aa + bb)y^n - 2a + 2ib}$$

erhalten, deren Integration der vorhergehenden ganz und gar gleich und quasi mit ihr in einem Schritt durchgeführt werden wird.

§20 Es ist aber offenkundig, dass in einer Rechnung von dieser Art die imaginären Größen mit den reellen um vieles mehr vermengt werden, als das in den vorhergehenden Problemen der Fall war, weil ja hier schon direkt zu Beginn die derivierten Koeffizienten F' und G' imaginäre Größen beinhalten; weiter wird auch $\tan n\varphi$ auf beiden Seiten von imaginären Größen durchsetzt, woher auch in die Werte X und Y imaginäre Größen eingehen werden; deswegen wird die Reduktion auf reelle Größen meistens sehr großer Arbeit bedürfen, für welche Aufgabe aber die notwendigen Vorschriften hinreichend bekannt sind.